

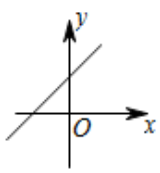
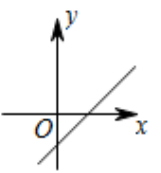
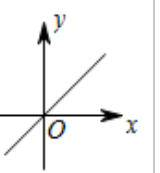
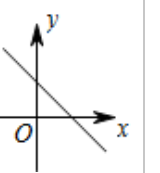
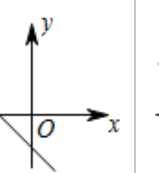
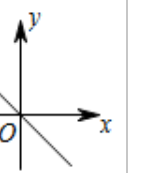
反比例函数

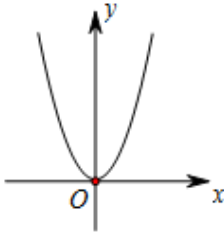
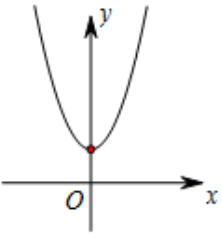
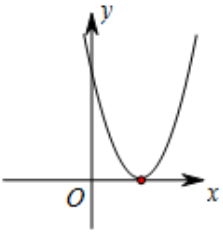
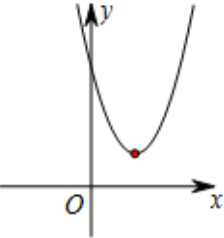


知识储备

想要课堂效率高，知识储备很重要



一次函数	$y = kx + b (k \neq 0)$					
k, b 符号	$k > 0$			$k < 0$		
	$b > 0$	$b < 0$	$b = 0$	$b > 0$	$b < 0$	$b = 0$
图象						
象限	一定经过第一、第三象限			一定经过第二、第四象限		
函数变化规律	y 随 x 的增大而增大			y 随 x 的增大而减小		

二次函数	$y = ax^2$	$y = ax^2 + k$	$y = a(x - h)^2$	$y = a(x - h)^2 + k$
图象				
对称轴	y 轴 ($x = 0$)	y 轴 ($x = 0$)	$x = h$	$x = h$
顶点	$(0, 0)$	$(0, k)$	$(h, 0)$	(h, k)
函数最小值	$y = 0$	$y = k$	$y = 0$	$y = k$
函数变化规律	当 $x < 0$ 时， y 随 x 的增大而减小 当 $x > 0$ 时， y 随 x 的增大而增大		当 $x < h$ 时， y 随 x 的增大而减小 当 $x > h$ 时， y 随 x 的增大而增大	



本节导图



一、反比例函数的定义

 线 索	 笔 记
定义	一般地，形如$y = \frac{k}{x}$ (k为常数，$k \neq 0$)的函数，叫做反比例函数。 其中x是自变量，y是函数，自变量x的取值范围是不等于0的一切实数。
表达式	反比例函数三种表达式： ① $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$)；② $y = kx^{-1}$ ($k \neq 0$)；③ $xy = k$ ($k \neq 0$)。 自变量x的取值范围是$x \neq 0$，函数值$y \neq 0$。
成反比例关系	成反比例关系不一定是反比例函数， 如y与x^2成反比例，则$y = \frac{k}{x^2}$ ($k \neq 0$)； 若$y + 3$与$x - 1$成反比例，则 $y + 3 = \frac{k}{x - 1} \quad (k \neq 0) .$
 总 结	

1. 下列函数中， y 是 x 的反比例函数的是（ ）。

A. $y = 5x$

B. $\frac{y}{x} = 1$

C. $xy = 123$

D. $y = \frac{1}{x^2}$

【答案】C

【解析】C: $xy = 123$,

$$\therefore y = \frac{123}{x} .$$

【标注】【知识点】根据反比例函数定义解题

2. 下列关于 x 的函数中：① $y = \frac{2}{x}$ ；② $y = \frac{-4}{3x}$ ；③ $y = \frac{k}{x}$ ；④ $y = \frac{m^2 + 2}{x}$ 中一定是反比例函数的有（ ）。

A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】 C

【解析】 函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 为常数, $k \neq 0$)叫做反比例函数.

①②均是反比例函数;

③ k 可能等于0;

④ $m^2 + 2 \geq 2$, 故也是反比例函数;

【标注】 【知识点】 反比例函数图象与性质

3. 如果 y 是 m 的反比例函数, m 是 x 的正比例函数, 那么 y 是 x 的 ().

A. 反比例函数

B. 正比例函数

C. 一次函数

D. 反比例或正比例函数

【答案】 A

【解析】 $\because y$ 是 m 的反比例函数,

$$\therefore y = \frac{k_1}{m} (k_1 \neq 0),$$

$\because m$ 是 x 的正比例函数,

$$\therefore m = k_2 x (k_2 \neq 0),$$

$$\therefore y = \frac{k_1}{k_2 x},$$

$\therefore y$ 是 x 的反比例函数.

【标注】 【知识点】 正比例函数的定义

4. 已知 $y - 2$ 与 $2x + 1$ 成反比例, 并且当 $x = 2$ 时, $y = 3$. 求 y 与 x 的函数关系式.

【答案】 $y = 2 + \frac{5}{2x + 1}$.

【解析】 $\because y - 2$ 与 $2x + 1$ 成反比例,

$$\therefore y - 2 = \frac{k}{2x + 1} (k \neq 0),$$

$$\text{把 } x = 2, y = 3 \text{ 代入得 } 3 - 2 = \frac{k}{2 \times 2 + 1},$$

解得 $k = 5$.

$$\therefore y \text{ 与 } x \text{ 的函数关系式为 } y = 2 + \frac{5}{2x + 1}.$$

【标注】 【知识点】 待定系数法求反比例函数解析式

5. 已知 $y = (m^2 + 2m)x^{m^2+m-1}$ 是关于 x 的反比例函数，则 m 的值为 _____ .

【答案】 -1

【解析】 $\because y = (m^2 + 2m)x^{m^2+m-1}$ 是关于 x 的反比例函数，

$$\therefore m^2 + m - 1 = -1 ,$$

解得 $m = -1$ 或 $m = 0$.

$$\because m^2 + 2m \neq 0 ,$$

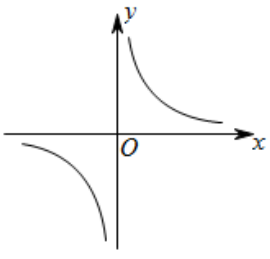
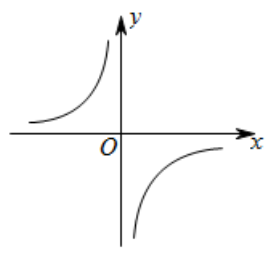
$$\therefore m \neq 0 ,$$

$$\therefore m = -1.$$

【标注】【知识点】根据反比例函数定义解题

二、反比例函数的图象与性质

1. 反比例函数图象

🔍 线索	📖 笔记	
反比例函数	$y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$	
k 的符号	$k > 0$	$k < 0$
图象		
图象特征	双曲线两分支分别位于第一、三象限	双曲线两分支分别位于第二、四象限
函数增减性	每一个象限内， y 随 x 的增大而减小	每一个象限内， y 随 x 的增大而增大


总结

① 反比例函数的增减性不是连续的，在描述其增减性时，一定要加上“在每一个象限内”。

② 已知自变量的大小，比较函数值的大小，不能笼统的利用“ $k > 0$ ， y 随 x 的增大而减小”，而是先看象限，确定正负；只有在同一象限时才能利用增减性比较函数值大小。

▮ 反比例函数性质

6. 反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 的图象在第二、四象限内，则点 $(m, -1)$ 在()。

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】 C

【解析】 $\because$ 反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 的图象经过第二、四象限，

$$\therefore m < 0,$$

$\therefore$ 点 $(m, -1)$ 横、纵坐标都为负数，

$\therefore$ 点 $(m, -1)$ 在第三象限。

故选C。

【标注】【知识点】根据反比例函数图象分布求参数的值（取值范围）

7. 反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图象位于() .

- A. 第一、第二象限 B. 第一、第三象限 C. 第二、第三象限 D. 第二、第四象限

【答案】 B

【解析】 根据反比例函数的图象性质可知, 当 $k > 0$ 时, 图象经过一、三象限.

【标注】【知识点】反比例函数系数与图象关系

8. 若反比例函数 $y = (2m - 1)x^{m^2-2}$ 的图象在第二、四象限, 则 m 的值是() .

- A. -1或1 B. 小于 $\frac{1}{2}$ 的任意实数
C. -1 D. 不能确定

【答案】 C

【解析】 $\because y = (2m - 1)x^{m^2-2}$ 是反比例函数,

$$\therefore \begin{cases} m^2 - 2 = -1 \\ 2m - 1 \neq 0 \end{cases} ,$$

解之得 $m = \pm 1$.

又因为图象在第二, 四象限,

所以 $2m - 1 < 0$,

解得 $m < \frac{1}{2}$, 即 m 的值是-1.

【标注】【知识点】根据反比例函数图象分布求参数的值(取值范围)

9. 反比例函数 $y = \frac{k^2 + 1}{x}$ 图象上有三个点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , 其中, $x_1 < x_2 < 0 < x_3$, 则 y_1 , y_2 , y_3 的大小关系是() .

- A. $y_1 < y_2 < y_3$ B. $y_2 < y_1 < y_3$
C. $y_3 < y_1 < y_2$ D. $y_3 < y_2 < y_1$

【答案】 B

【解析】 $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k^2 + 1}{x}$ 中 $k^2 + 1 > 0$ 恒成立,

$\therefore$ 当 $x < 0$ 时, $y < 0$, 且 y 随 x 的增大而减小,

当 $x > 0$ 时, $y > 0$, 且 y 随 x 的增大而减小.

$\because x_1 < x_2 < 0 < x_3$,

$\therefore y_2 < y_1 < 0 < y_3$,

即 $y_2 < y_1 < y_3$,

故选B .

【标注】【知识点】反比例函数增减性

【知识点】反比例函数系数与图象关系

10. 若点 $A(-1, y_1)$, $B(1, y_2)$, $C(3, y_3)$ 在反比例函数 $y = -\frac{3}{x}$ 的图象上 , 则 y_1 , y_2 , y_3 的大小关系是 () .

A. $y_1 < y_2 < y_3$

B. $y_2 < y_3 < y_1$

C. $y_3 < y_2 < y_1$

D. $y_2 < y_1 < y_3$

【答案】 B

【解析】 方法一： $\because$ 反比例函数 $y = -\frac{3}{x}$ 中 , $k = -3 < 0$,

$\therefore$ 函数图象的两个分支分别位于第二、四象限 , 且在每一象限内 , y 随 x 的增大而增大 ,

$\because -1 < 0$, $0 < 1 < 3$,

$\therefore$ 点 $A(-1, y_1)$ 在第二象限 , 点 $B(1, y_2)$, $C(3, y_3)$ 在第四象限 ,

$\therefore y_2 < y_3 < y_1$. 故选B .

方法二： $\because$ 点 $A(-1, y_1)$, $B(1, y_2)$, $C(3, y_3)$ 在反比例函数 $y = -\frac{3}{x}$ 的图象上 ,

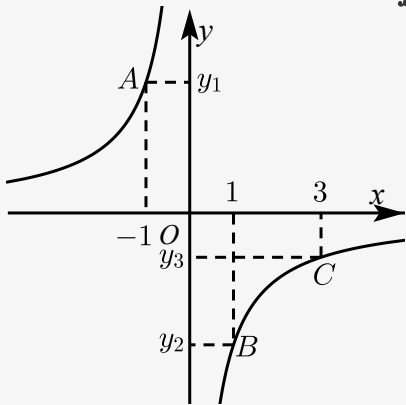
$\therefore$ 当 $x = -1$ 时 , $y_1 = \frac{-3}{-1} = 3$;

当 $x = 1$ 时 , $y_2 = \frac{-3}{1} = -3$;

当 $x = 3$ 时 , $y_3 = \frac{-3}{3} = -1$

$\therefore y_2 < y_3 < y_1$

方法三：作出反比例函数 $y = -\frac{3}{x}$ 的图象如图所示 , 观察图象可得 $y_2 < y_3 < y_1$.



【标注】【知识点】反比例函数增减性

【能力】推理论证能力

11. 点 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上, 当 $x_1 < x_2 < 0$ 时, $y_1 < y_2$, 则 k 的取值可以是 _____ (只填一个符合条件的 k 的值) .

【答案】 答案不唯一

【解析】 根据题意得 $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = k$,

而 $x_1 < x_2 < 0$ 时, $y_1 < y_2$,

所以 $k < 0$,

所以 k 可取 -1 . 故答案为 -1 .

【标注】【知识点】反比例函数系数与图象关系

12. 已知: 反比例函数 $y = \frac{10}{x}$, 当 $1 < x < 2$ 时, y 的取值范围是().

A. $0 < y < 5$

B. $1 < y < 2$

C. $5 < y < 10$

D. $y > 10$

【答案】 C

【解析】 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$, $k > 0$ 时, 在同一象限内 y 随 x 的增大而减小, $\therefore y = \frac{10}{x}$, 当 $1 < x < 2$ 时, $5 < y < 10$.

【标注】【知识点】反比例函数增减性

13. 如果反比例函数 $y = \frac{m-2}{x}$, 当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而减小, 那么 m 的值可能是 _____ (写出一个即可) .

【答案】 3 (答案不唯一)

【解析】 由反比例函数图象与系数的性质,

当 $k > 0$ 时, 在每一象限, y 随 x 的增大而减小,

$$\therefore m - 2 > 0,$$

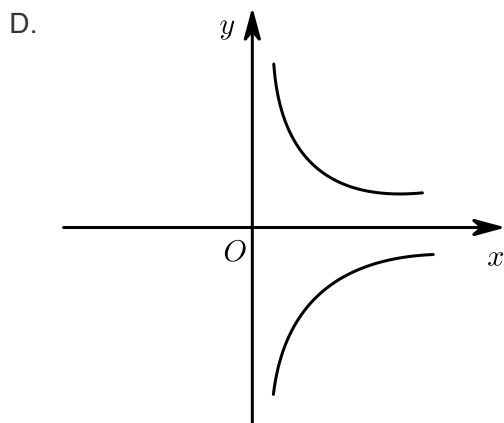
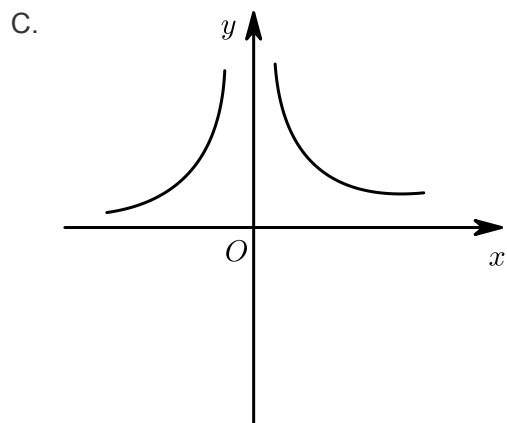
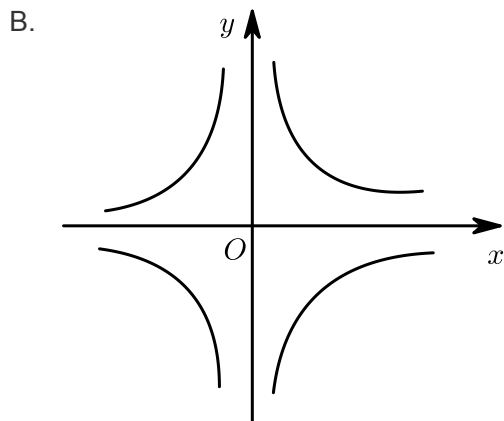
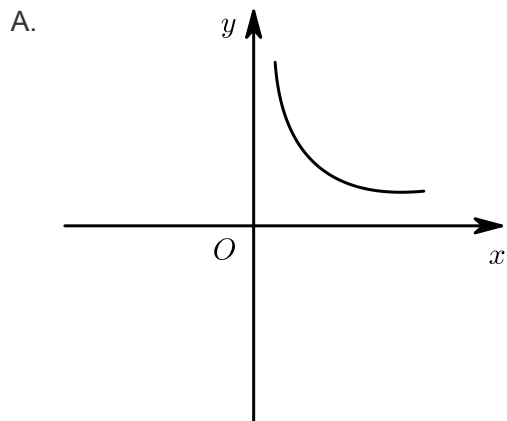
$$\therefore m > 2,$$

$\therefore m$ 的取值范围为: $m > 2$ 即可.

故答案为: 3 (答案不唯一) .

【标注】【知识点】反比例函数增减性

14. 函数 $y = \frac{k}{|x|}$ ($k > 0$)的图象可能是().



【答案】 C

【解析】 对于函数 $y = \frac{k}{|x|} (k > 0)$,

当 $x > 0$ 时, $y = \frac{k}{x} (k > 0)$, 则过第一象限 ,

当 $x < 0$ 时, $y = \frac{k}{-x} = \frac{-k}{x}$,

$\because k > 0$,

$\therefore -k < 0$,

$\therefore$ 过第二象限 ,

综上所述 : 当 $x \neq 0$ 时 , 函数 $y = \frac{k}{|x|} (k > 0)$ 过一、二象限 .

故选 C .

【标注】 【知识点】反比例函数系数与图象关系

15. 关于反比例函数 $y = -\frac{4}{x}$, 下列说法正确的是 () .

A. 函数图象经过点 (2, 2)

B. 函数图象位于第一、三象限

C. 当 $x > 0$ 时 , 函数值 y 随着 x 的增大而增大

D. 当 $x > 1$ 时, $y < -4$.

【答案】C

【解析】A选项：关于反比例函数 $y = -\frac{4}{x}$ ，函数图象经过点 $(2, -2)$ ，故A错误；

B选项：关于反比例函数 $y = -\frac{4}{x}$ ，函数图象位于第二、四象限，故B错误；

C选项：关于反比例函数 $y = -\frac{4}{x}$ ，当 $x > 0$ 时，函数值 y 随着 x 的增大而增大，故C正确；

D选项：关于反比例函数 $y = -\frac{4}{x}$ ，当 $x > 1$ 时， $-4 < y < 0$ ，故D错误；

故选C.

【标注】【知识点】反比例函数系数与图象关系

16. 已知函数 $y = \frac{m}{x}$ 的图象如图，以下结论：

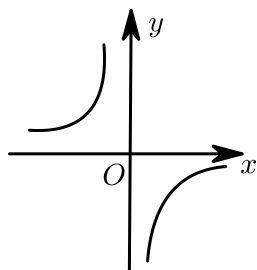
① $m < 0$.

②在每个分支上 y 随 x 的增大而增大.

③若点 $A(-1, a)$ 、点 $B(2, b)$ 在图象上，则 $a < b$.

④若点 $P(x, y)$ 在图象上，则点 $P_1(-x, -y)$ 也在图象上.

其中正确的个数是().



A. 4个

B. 3个

C. 2个

D. 1个

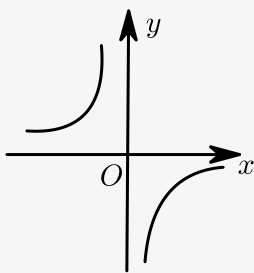
【答案】B

【解析】①根据反比例函数的图象的两个分支分别位于二、四象限，可得 $m < 0$ ，故正确.

②在每个分支上 y 随 x 的增大而增大，故正确.

③若点 $A(-1, a)$ 、点 $B(2, b)$ 在图象上，则 $a > b$ ，故错误.

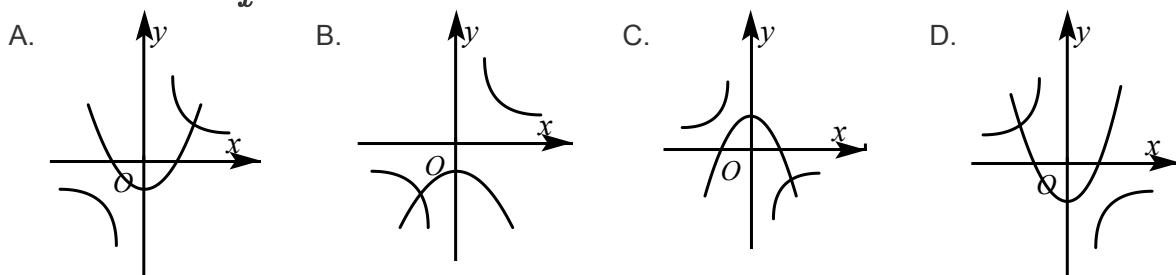
④若点 $P(x, y)$ 在图象上，则点 $P_1(-x, -y)$ 也在图象上，故正确.



【标注】【知识点】反比例函数系数与图象关系

▮ 反比例函数图象

17. $a \neq 0$, 函数 $y = \frac{a}{x}$ 与 $y = -ax^2 + a$ 在同一直角坐标系中的大致图象可能是 () .

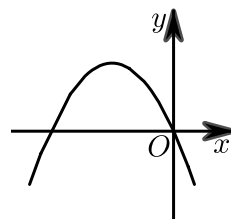


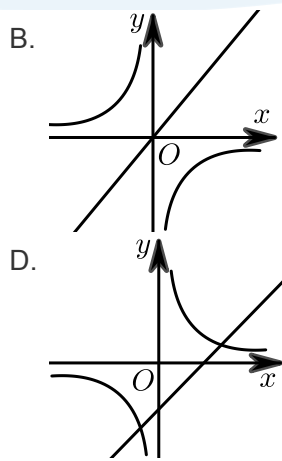
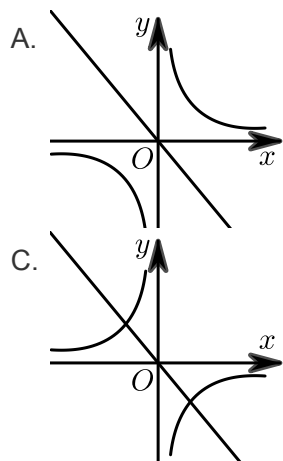
【答案】D

【解析】当 $a > 0$ 时, 则 $-a < 0$,
反比例图象经过第一、三象限,
二次函数图象开口向下, 并与 y 轴交于正半轴,
故此种情况, 没有答案可选,
当 $a < 0$ 时, 则 $-a > 0$,
反比例图象经过第二、四象限,
二次函数图象开口向上, 并与 y 轴交于负半轴,
故答案选D.

【标注】【知识点】反比例函数与二次函数图象的综合判断

18. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示, 那么一次函数 $y = bx + c$ 和反比例函数 $y = \frac{a}{x}$ 在同一平面直角坐标系中的图象大致是 () .





【答案】 C

【解析】 $\because$ 二次函数图象开口向下，

$$\therefore a < 0,$$

$$\therefore \text{对称轴 } x = -\frac{b}{2a} < 0,$$

$$\therefore b < 0,$$

$\therefore$ 二次函数图象经过坐标原点，

$$\therefore c = 0,$$

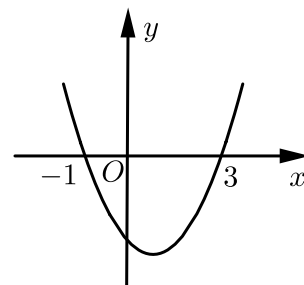
$\therefore$ 一次函数 $y = bx + c$ 过第二四象限且经过原点，反比例函数 $y = \frac{a}{x}$ 位于第二四象限，

纵观各选项，只有C选项符合．

故选C．

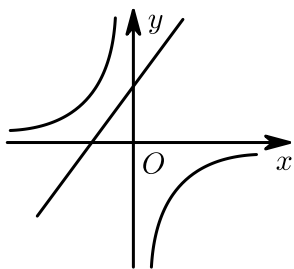
【标注】 【知识点】判断反比例函数与一次函数图象

19. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示，则一次函数 $y = ax + b$ 与反比例函数 $y = \frac{c}{x}$ 在同一平面直角坐标系内的图象大致为（ ）．

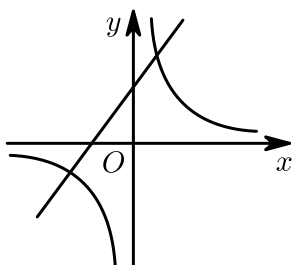


A.

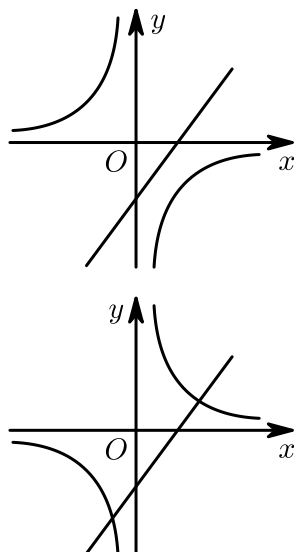
B.



C.



D.



【答案】 B

【解析】 由二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象的开口方向可知 $a > 0$,

由抛物线与 y 轴的交点 , 可知 $c < 0$,

由抛物线对称轴在 y 轴右侧可知 $-\frac{b}{2a} > 0$,

又 $\because a > 0$, 则 $b < 0$,

$\therefore a > 0$, $b < 0$, $c < 0$,

则一次函数 $y = ax + b$ 在第一、三、四象限 ,

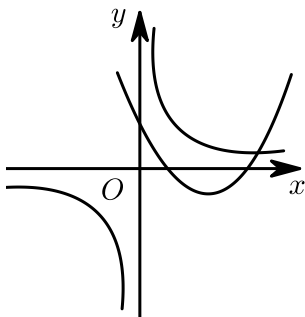
反比例函数 $y = \frac{c}{x}$ 在第二、四象限 .

故选 B .

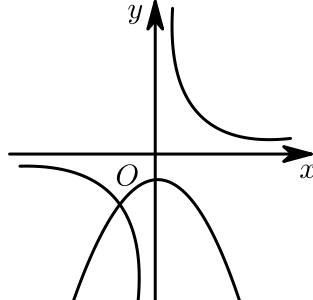
【标注】 【知识点】 判断反比例函数与一次函数图象

20. 函数 $y = mx^2 + m$ 与 $y = \frac{m}{x} (m \neq 0)$, 在同一坐标系中的图象可能是 () .

A.

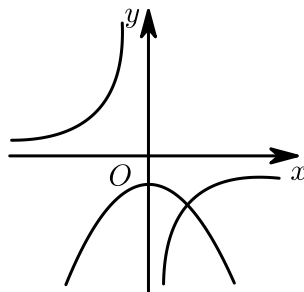
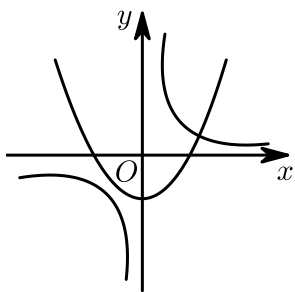


B.



C.

D.



【答案】D

【解析】由于二次函数 b 为0，所以对称轴为 y 轴，A错误；

若 $m > 0$ ，反比例函数在一三象限，二次函数开口向上，与外 y 轴交于正半轴，所以B、C错误；

$m < 0$ ，反比例函数在第二四象限，二次函数开口向下，且交于 y 轴负半轴。故D正确。
故选D。

【标注】【知识点】反比例函数与二次函数图象的综合判断

三、反比例函数的解析式

 线 索	 笔 记
1、待定系数法求反比例函数解析式	反比例函数的解析式 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 中, 只有一个待定系数 k , k 的值确定, 反比例函数的解析式也就确定了, 因而只需给出一对 x, y 的对应值或确定反比例函数图象上一个点的坐标 (x, y) , $k = xy$ 即可.
2、反比例函数解析式与图象——对应的	满足函数关系式 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的点 (x, y) 在其对应的图象上. 反之, 函数图象上的点的坐标 (x, y) 满足函数关系式 $y = \frac{k}{x}$.
3、反比例函数图象上点的坐标	已知 P 点在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 上, 若 P 点横坐标为 m , 则 P 点纵坐标为 $\frac{k}{m}$; 已知 Q 点在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 上, 若 Q 点纵坐标为 t , 则 Q 点横坐标为 $\frac{k}{t}$.
 总 结	

21. 反比例函数 $y = \frac{k-2}{x}$ 的图象经过点 $(2, 4)$, 则 k 的值等于 ____ .

【答案】 10

【解析】 $\because$ 点 $(2, 4)$ 在反比例函数 $y = \frac{k-2}{x}$ 的图象上,
 $\therefore 4 = \frac{k-2}{2}$,
 即 $k = 10$.
 故答案为: 10.

【标注】【知识点】点在反比例函数图象上

22. 若反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象经过点 $P(-2, 3)$, 则该函数的图象不经过的点是 ().
 A. $(3, -2)$ B. $(1, -6)$ C. $(-1, 6)$ D. $(-1, -6)$

【答案】 D

【解析】 $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象经过点 $P(-2, 3)$,

$$\therefore k = -2 \times 3 = -6,$$

$\therefore$ 只需把各点横纵坐标相乘, 不是 -6 的, 该函数的图象就不经过此点.

故选 D.

【标注】 【知识点】 点在反比例函数图象上

23. 若反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象经过点 $(-1, 2)$, 则这个函数的图象一定经过点 ().

A. $(2, -1)$

B. $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$

C. $(-2, -1)$

D. $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

【答案】 A

【解析】 $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过点 $(-1, 2)$,

$\therefore k = -1 \times 2 = -2$, 只需把所给点的横纵坐标相乘, 结果是 -2 的, 就在此函数图象上,

四个选项中只有 A: $2 \times (-1) = -2$ 符合.

故选 A.

【标注】 【知识点】 根据条件求反比例函数解析式 (或 k 的值)

24. 若点 $A(a, b)$ 在双曲线 $y = \frac{3}{x}$ 上, 则代数式 $ab - 4$ 的值为 ().

A. -12

B. -7

C. -1

D. 1

【答案】 C

【解析】 若点 $A(a, b)$ 在双曲线 $y = \frac{3}{x}$ 上, 则 $b = \frac{3}{a}$, $\therefore ab = 3$, $\therefore ab - 4 = -1$.

【标注】 【知识点】 点在反比例函数图象上

25. 在平面直角坐标系 xOy 中, 第一象限内的点 P 在反比例函数的图象上, 如果点 P 的纵坐标是 3 ,

$OP = 5$, 那么该函数的表达式为 ().

A. $y = \frac{12}{x}$

B. $y = -\frac{12}{x}$

C. $y = \frac{15}{x}$

D. $y = -\frac{15}{x}$

【答案】 A

【解析】 点 P 的纵坐标是3, $OP = 5$,
由勾股定理可知 P 的横坐标是4,
即 $P(4, 3)$, $k = 3 \times 4 = 12$,
 $\therefore$ 该函数的表达式为 $y = \frac{12}{x}$.

【标注】【知识点】根据条件求反比例函数解析式(或 k 的值)

26. 已知 y 是 x 的反比例函数, 并且当 $x = 2$ 时, $y = 6$.

(1) 求 y 关于 x 的函数解析式.

(2) 当 $x = 4$ 时, 求 y 的值.

【答案】 (1) $y = \frac{12}{x}$.

(2) 3.

【解析】 (1) 设 $y = \frac{k}{x}$

因为 $x = 2$ 时, $y = 6$,

所以 $6 = \frac{k}{2}$,

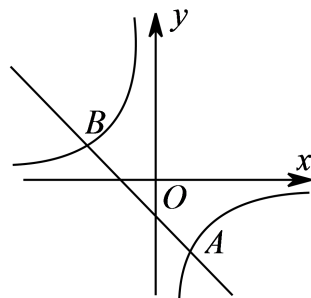
解得 $k = 12$.

因此 $y = \frac{12}{x}$.

(2) 把 $x = 4$ 代入 $y = \frac{12}{x}$, 得
 $y = \frac{12}{4} = 3$.

【标注】【知识点】根据条件求反比例函数解析式(或 k 的值)

27. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y = kx + b(k \neq 0)$ 与双曲线 $y = \frac{m}{x}(m \neq 0)$ 交于点 $A(1, -2)$ 和点 $B(n, 1)$. 求直线与双曲线的表达式.



【答案】 $y = -x - 1$, $y = -\frac{2}{x}$.

【解析】 $\because y = kx + b$ 与 $y = \frac{m}{x}$ 交于 A, B 两点 ,

$$\therefore -2 = \frac{m}{-1} \text{ 即 } m = -2 ,$$

$$\therefore y = \frac{-2}{x} ,$$

$$\therefore 1 = \frac{-2}{n} \text{ 即 } n = -2 ,$$

$$\therefore B(-2, 1) ,$$

$$\therefore \begin{cases} 1 = -2k + b \\ -2 = k + b \end{cases} ,$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -1 \\ b = -1 \end{cases} ,$$

$$\therefore y = -x - 1 .$$

【标注】 【知识点】 反比例函数与一次函数综合

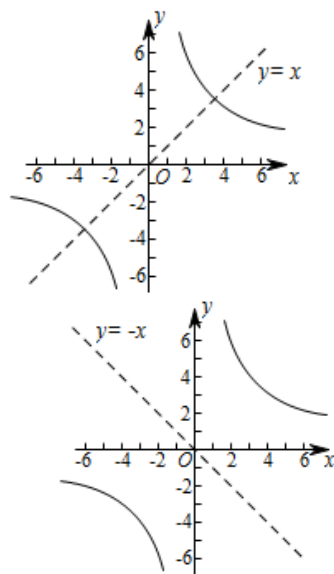
四、 反比例函数的对称性

🔍 线索

轴对称

📖 笔记

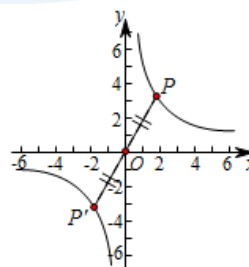
反比例函数图象是轴对称图形，关于直线 $y = x$ 和 $y = -x$ 成轴对称 .



反比例函数是中心对称图形，双曲线的两支图象关于原点成中心对称 .

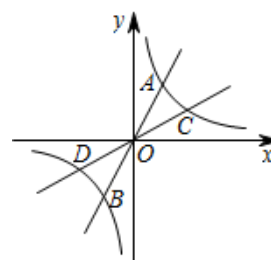
如图： $OP = OP'$ ，若已知点 $P(x, y)$ ，则可得 $P'(-x, -y)$.

中心对称



由于正比例函数和反比例函数都是关于原点中心对称的函数，

若这两个函数有交点，则这两交点一定关于原点成中心对称。



如图， A 、 B 两点关于原点对称， C 、 D 两点也是关于原点对称。



总结

反比例函数的图象既是轴对称图形，又是中心对称图形。

28. 对于反比例函数 $y = -\frac{6}{x}$ 图象对称性的叙述错误的是（ ）。

- A. 关于原点对称
- B. 关于直线 $y = x$ 对称
- C. 关于直线 $y = -x$ 对称
- D. 关于 x 轴对称

【答案】D

【解析】 $\because$ 双曲线 $y = -\frac{6}{x}$ 的两个分支分别在二、四象限，

$\therefore$ 两个分支关于原点对称，关于直线 $y = x$ 对称，故A、B选项正确；

此双曲线的每一个分支关于直线 $y = -x$ 对称，故C选项正确；

故只有选项D错误。

故选D。

【标注】【知识点】反比例函数中心对称性

29. 在同一坐标系内，反比例函数 $y = \frac{k+1}{x}$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k-3}{x}$ 的图象（ k 为常数）具有以下对称性：既关于 x 轴，又关于 y 轴成轴对称，那么 k 的值是 _____ .

【答案】 1

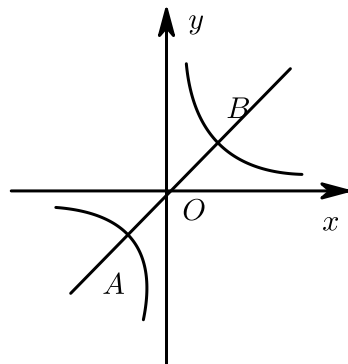
【解析】 直接利用反比例函数的对称性得出两系数互为相反数，所以由题意可得

$$k+1+k-3=0$$

所以 $k=1$.

【标注】【知识点】反比例函数系数与图象关系

30. 如图，直线 $y = ax(a > 0)$ 与曲线 $y = \frac{3}{x}$ 交于点 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ ，则 $4x_1y_2 - 3x_2y_1$ 的值是 _____ .



【答案】 -3

【解析】 由题知 $x_1y_1 = x_2y_2 = 3$ ， $y_1 = ax_1$ ， $y_2 = ax_2$ ，

所以 $x_1 \cdot ax_1 = x_2 \cdot ax_2 = 3$ ，则 $a^2x_1^2x_2^2 = 9$ ，

由图象知 x_1 与 x_2 异号，且 $a > 0$ ，

所以 $ax_1x_2 = -3$.

于是 $4x_1y_2 - 3x_2y_1 = 4x_1 \cdot ax_2 - 3x_2 \cdot ax_1 = ax_1x_2 = -3$.

【标注】【知识点】反比例函数与一次函数综合



对答如流——口述题

- 反比例函数的表达式为① $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ ；② $y = kx^{-1} (k \neq 0)$ ；③ $xy = k (k \neq 0)$.
- 反比例函数与成反比例关系有什么区别？举个例子 .

成反比例关系不一定是反比例函数，如 y 与 x^2 成反比例，则 $y = \frac{k}{x^2} (k \neq 0)$

3、反比例函数的图像为双曲线，

$k > 0$ 时，双曲线两分支分别位于第一、三象限，每一个象限内， y 随 x 的增大而减小

$k < 0$ 时，双曲线两分支分别位于第二、四象限，每一个象限内， y 随 x 的增大而增大

4、反比例函数的对称性为：轴对称图形，中心对称图形。

五、反比例函数中 k 的几何意义

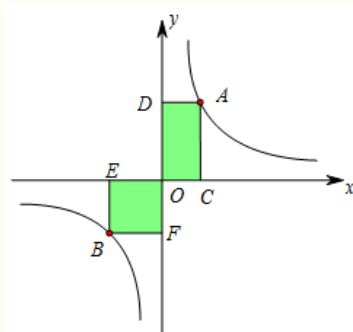


Q 线索

k 的几何意义

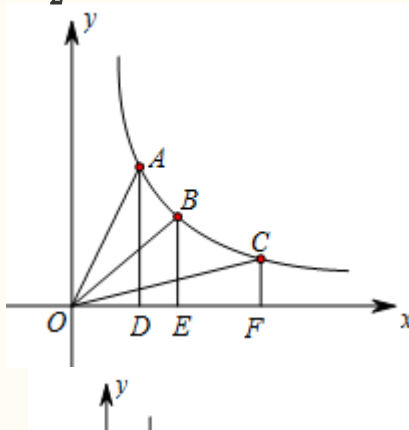
笔记

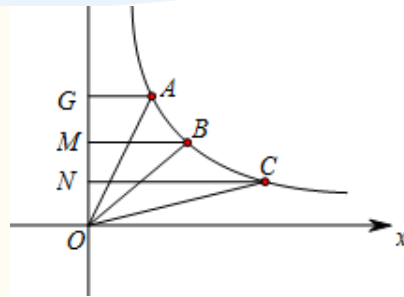
过双曲线上任一点向两坐标轴作垂线，垂线段与坐标轴所围成矩形的面积为 $|k|$ 。



$$S_{\text{四边形}DOCA} = S_{\text{四边形}BEOF} = |k|.$$

过双曲线上任一点向坐标轴作一条垂线，并连接此点和原点，这两条线段与坐标轴所围成三角形的面积为 $\frac{|k|}{2}$ 。





$$S_{\triangle AOD} = S_{\triangle BOE} = S_{\triangle COF} = S_{\triangle AOG} = S_{\triangle BOM} = S_{\triangle CON} = \frac{|k|}{2}$$



总结

利用反比例函数的解析式求矩形或三角形面积时应该加上绝对值符号；

反过来通过矩形或是三角形面积求函数解析式时要根据函数图象经过的象限确定 k 的正负。



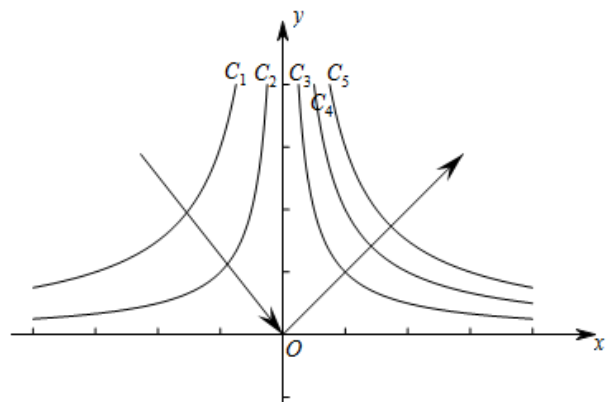
线索



笔记

在同一直角坐标系中，随着 $|k|$ 的增大，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 图象的位置相对于坐标原点越来越远。

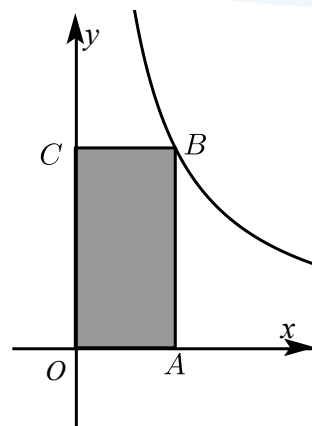
注意



总结

沿着箭头所指的方向 k 值越来越大。

31. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中， B 是反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ ($x > 0$) 图象上的一点，则矩形 $OABC$ 的面积为 ()。



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

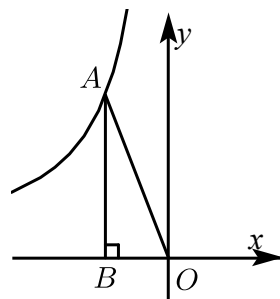
【答案】 B

【解析】 $\because$ 点 B 在反比例函数 $y = \frac{2}{x} (x > 0)$ 的图象上，
 $\therefore$ 矩形 $OABC$ 的面积 $S = |k| = 2$.

故选 **B** .

【标注】 【知识点】反比例函数的系数 k 的几何意义

32. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，反比例函数 $y = -\frac{4}{x}$ 在第二象限的图象上有一点 A ，过点 A 作 $AB \perp x$ 轴于点 B ，则 $S_{\triangle AOB} = \underline{\hspace{2cm}}$.

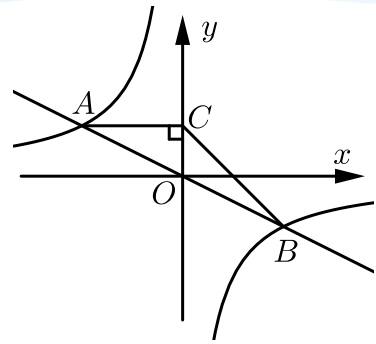


【答案】 2

【解析】 $S_{\triangle AOB} = \frac{|k|}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

【标注】 【知识点】反比例函数的系数 k 的几何意义

33. 如图，直线 AB 经过原点 O ，与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 交于 A 、 B 两点， $AC \perp y$ 轴于点 C ，且 $\triangle ABC$ 的面积是 8，则 k 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 -8

【解析】 由反比例函数的对称性可知， A 与 B 关于原点对称，

$$\therefore S_{\triangle AOC} = S_{\triangle BOC},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle AOC},$$

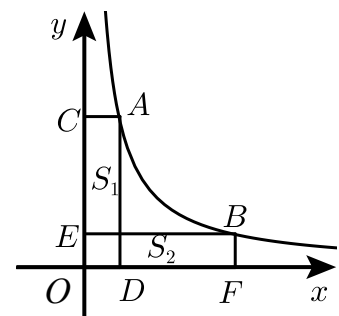
$$\text{即 } 8 = |k|,$$

$\therefore$ 该反比例函数图象位于二、四象限，

$$\therefore k = -8.$$

【标注】 【知识点】反比例函数的系数 k 的几何意义

34. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 、 B 在反比例函数 $y = \frac{2}{x} (x > 0)$ 的图象上，如果将矩形 $OCAD$ 的面积记为 S_1 ，矩形 $OEBF$ 的面积记为 S_2 ，那么 S_1 ， S_2 的关系是（ ）.



A. $S_1 > S_2$

B. $S_1 = S_2$

C. $S_1 < S_2$

D. 不能确定

【答案】 B

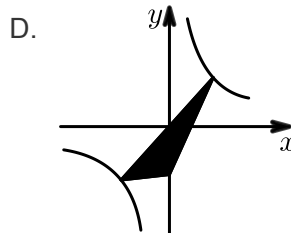
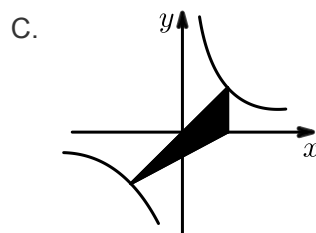
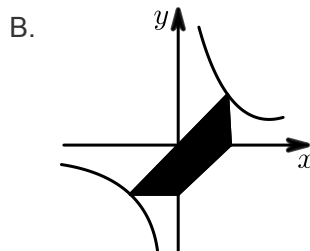
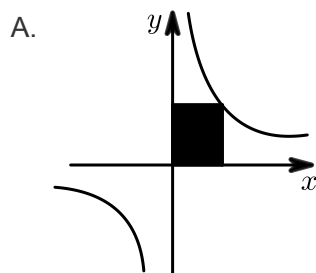
【解析】 根据反比例函数 k 的几何意义可知：

$$S_1 = S_2 = 2.$$

故选：B.

【标注】 【知识点】反比例函数的系数 k 的几何意义

35. 在反比例函数 $y = \frac{9}{x}$ 的图象中，阴影部分的面积不等于9的是（ ）.



【答案】 B

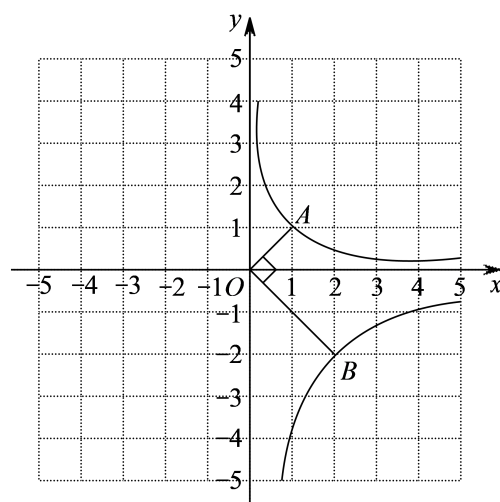
【解析】 A. 图形面积为9；

B. 阴影是梯形，面积为 $\frac{27}{2}$ ；

C、D面积均为两个三角形面积之和，为 $2 \times \left(\frac{1}{2} \times |9|\right) = 9$.

【标注】【知识点】反比例函数的系数k的几何意义

36. 已知点A、B分别在反比例函数 $y = \frac{1}{x} (x > 0)$ ， $y = -\frac{4}{x} (x > 0)$ 的图象上，且 $OA \perp OB$ ，则 $OA : OB$ 的值为 _____ .



【答案】 1 : 2

【解析】 过A作 $AC \perp y$ 轴， $BD \perp y$ 轴，

又 $\because OA \perp OB$, $\therefore$

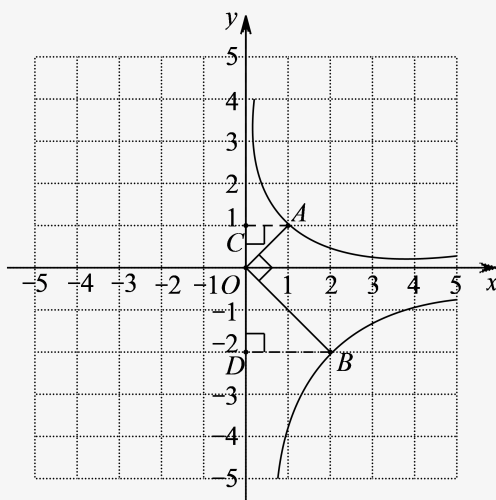
$$\angle AOC + \angle A = 90^\circ,$$

$$\angle AOC + \angle DOB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle DOB. \therefore$$

$$\triangle ACO \sim \triangle ODB.$$

$\therefore$



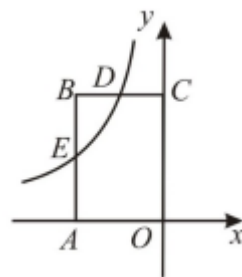
$$\frac{S_{\triangle ACO}}{S_{\triangle ODB}} = \left(\frac{OA}{OB} \right)^2 = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}.$$

$$\therefore OA : OB = 1 : 2.$$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

37. 如图, 矩形 $OABC$ 的顶点 A, C 分别在 x 轴和 y 轴上, 若 $OA = 4, OC = 6$, 写出一个函数

$y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$, 使它的图象与矩形 $OABC$ 的两边 AB, BC 分别交于点 E, D , 这个函数的表达式为 _____.



【答案】 $y = -\frac{1}{x}$

【解析】 $y = -\frac{1}{x}$ (答案不唯一).

【标注】【知识点】反比例函数的系数 k 的几何意义

38. 过反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 图象上任意一点向两条坐标轴作垂线, 所得矩形的面积为 $6\sqrt{3}$, 则 $k =$ _____; 一个正比例函数的图象与此反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的图象交于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点, 则 $(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) =$ _____.

【答案】 $6\sqrt{3}; 24\sqrt{3}$

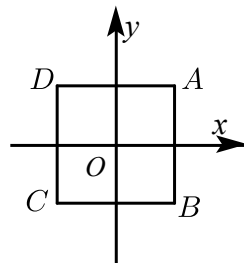
【解析】 由反比例函数 $|k|$ 的几何意义可知，过反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 图象上任意一点向两条坐标轴作垂线，所得矩形的面积为 $6\sqrt{3}$ ，则 $k = 6\sqrt{3}$ ．一个正比例函数的图象与此反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的图象交于 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ 两点，则有 $x_1 = -x_2$ ．

$$\begin{aligned} \therefore (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) &= x_2y_2 - x_2y_1 - x_1y_2 + x_1y_1 \\ &= x_2y_2 + x_1y_1 - x_2 \cdot \frac{k}{x_1} - x_1 \cdot \frac{k}{x_2} \\ &= 4k \\ &= 24\sqrt{3} . \end{aligned}$$

故答案为 $6\sqrt{3}$ ， $24\sqrt{3}$ ．

【标注】【知识点】反比例函数系数与图象关系

39. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 O 为正方形 $ABCD$ 对角线的交点，且正方形 $ABCD$ 的边均与某条坐标轴平行且垂直， $AB = 4$ ．



- (1) 如果反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过点 A ，求这个反比例函数的表达式．
 (2) 如果反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象与正方形 $ABCD$ 有公共点，请直接写出 k 的取值范围．

【答案】 (1) $y = \frac{4}{x}$ ．

(2) $0 < k \leq 4$ 或 $-4 \leq k < 0$ ．

【解析】 (1) 由题意，得： $A(2, 2)$ ，

$\therefore$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过点 A ，

$\therefore k = 4$ ，

$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y = \frac{4}{x}$ ．

(2) 由题意可知 $A(2, 2)$ ， $D(-2, 2)$ ，

① 当 $k > 0$ 时， $y = \frac{k}{x}$ 过点 A 时， $k = 4$ ，此时图象与正方形有1个公共点，

$\therefore k$ 的取值范围为 $0 < k \leq 4$ ．

② 当 $k < 0$ 时， $y = \frac{k}{x}$ 过点 D 时， $k = -4$ ，此时图象与正方形有1个公共点，

$\therefore k$ 的取值范围为 $-4 \leq k < 0$ ．

综上所述， k 的取值范围为 $0 < k \leq 4$ 或 $-4 \leq k < 0$ ．

【标注】【思想】数形结合思想

【思想】函数思想

【知识点】待定系数法求反比例函数解析式

【知识点】反比例函数与方程、不等式

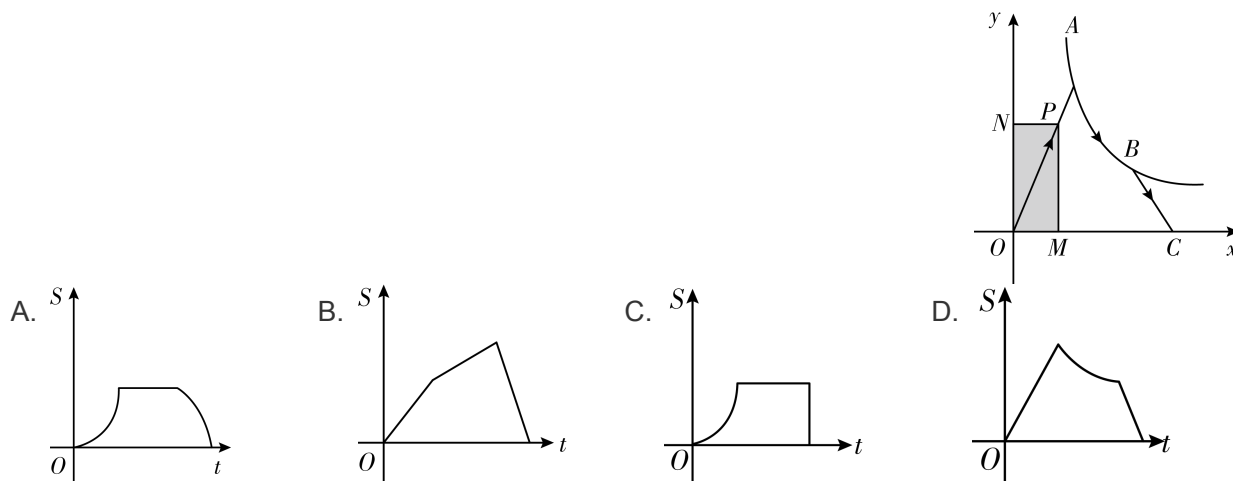
【知识点】正方形的性质

【能力】运算能力

六、反比例函数综合问题

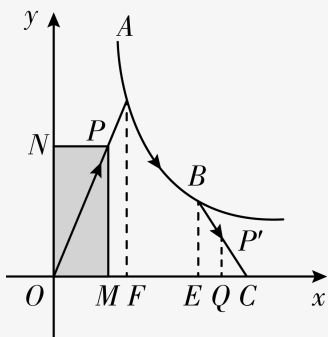
动点与函数图象

40. 如图，已知 $A(1,2)$ ， $B(2,1)$ 是反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 图象上的两点，点 C 的坐标为 $(3,0)$ ，连接 OA ， BC 。动点 P 从坐标原点 O 出发，沿 $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$ （图中“ $\rightarrow$ ”所示路线）匀速运动，终点为 C 。过 P 作 $PM \perp x$ 轴， $PN \perp y$ 轴，垂足分别为 M ， N 。设四边形 $OMPN$ 的面积为 S ， P 点的坐标为 (x, y) ，则 S 关于时间 t 的函数图象大致为（ ）。



【答案】A

【解析】当 P 点在 OA 上运动时，过点 A 作 $AF \perp CO$ 于点 F



$$\therefore PM \parallel AF,$$

$$\therefore \triangle OPM \sim \triangle OAF,$$

$$\therefore \frac{PM}{AF} = \frac{OM}{FO}$$

$$\therefore \frac{y}{2} = \frac{x}{1}$$

$$\therefore y = 2x$$

$$\therefore S = x \cdot 2x = 2x^2 \text{ 是二次函数,}$$

当 P 点在反比例函数图象上运动时, $S = k$,

当 P 在 BC 上运动时, 过点 B 作 $BE \perp CO$ 于点 E , 过点 P' 作 $P'Q \perp CO$ 于点 Q ,

同理可得出: $\triangle CP'Q \sim \triangle CBE$,

$$\therefore QC = 3 - x, EC = 1, BE = 1, P'Q = y,$$

$$\therefore \frac{y}{1} = \frac{3-x}{1},$$

$$\therefore y = 3 - x,$$

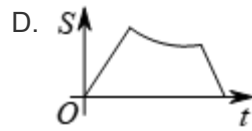
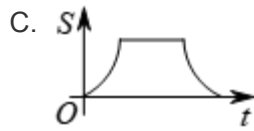
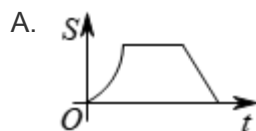
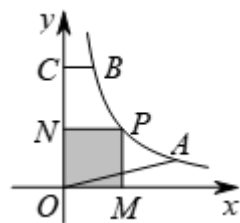
$$\therefore S = x(3 - x) = -x^2 + 3x \text{ 是二次函数,}$$

故符合题意的图象是A.

故选A.

【标注】【知识点】由动点判断函数图象

41. 如图, 已知 A 、 B 是反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0) (x > 0)$ 上的两点, $BC \parallel x$ 轴, 交 y 轴于 C , 动点 P 从坐标原点 O 出发, 沿 $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$ 匀速运动, 终点为 C , 过运动路线上任意一点 P 作 $PM \perp x$ 轴于 M , $PN \perp y$ 轴于 N , 设四边形 $OMPN$ 的面积为 S , P 点运动的时间为 t , 则 S 关于 t 的函数图象大致是 () .



【答案】 A

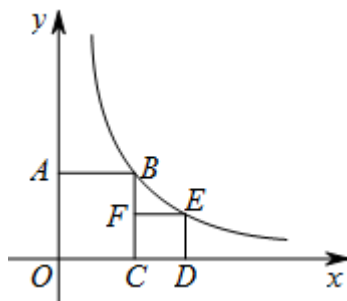
【解析】 点 P 在 AB 上运动时, 此时四边形 $OMPN$ 的面积 $S = K$, 保持不变, 故排除B、D;

点 P 在 BC 上运动时，设路线 $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$ 的总路程为1，点 P 的速度为 a ，则
 $S = OC \times CP = OC \times (1 - at)$ ，因为1， OC ， a 均是常数，
 所以 S 与 t 成一次函数关系．故排除C．
 故选A．

【标注】【知识点】函数的图象

反比例函数中探究规律

如图，正方形 $OABC$ ， $CDEF$ 的顶点 A 、 C 、 D 在坐标轴上，点 F 在 BC 上，点 B 、 E 在函数
 $y = \frac{9}{x}$ ($x > 0$) 的图象上，则点 E 的坐标_____．



依题可知，点 $B(3, 3)$ ，

设小正方形 $CDEF$ 的边长为 x ，

则 $D(3 + x, 0)$ ， $E(3 + x, x)$ ，

点 E 在反比例函数 $y = \frac{9}{x}$ 的图象上，

故 $x(3 + x) = 9$ ，即 $x^2 + 3x - 9 = 0$ ，

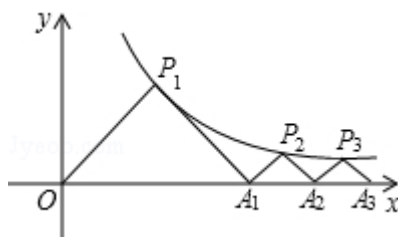
$x_1 = \frac{-3 + 3\sqrt{5}}{2}$ ， $x_2 = \frac{-3 - 3\sqrt{5}}{2}$ (舍)，

即 $E(\frac{3 + 3\sqrt{5}}{2}, \frac{-3 + 3\sqrt{5}}{2})$ ．

如图, $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)$ 在函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0, x > 0)$ 的图象上, $\triangle OP_1A_1, \triangle P_2A_1A_2, \triangle P_3A_2A_3, \dots, \triangle P_nA_{n-1}A_n$ 都是等腰直角三角形, 斜边 $OA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ 都在 x 轴上.

① A_1 的坐标为 _____, A_n 的坐标为 _____.

② $y_1 + y_2 + \dots + y_n =$ _____.



依题可知, $P_1(\sqrt{k}, \sqrt{k}), A_1(2\sqrt{k}, 0)$.

设 A_1 的横坐标为 a_1 , A_2 的横坐标为 a_2 , A_3 的横坐标为 $a_3 \dots, A_n$ 的横坐标为 a_n ,

P_2 的坐标为 $(\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_2 - a_1}{2})$,

则 $\frac{a_2 + a_1}{2} \times \frac{a_2 - a_1}{2} = \frac{a_2^2 - a_1^2}{4} = k, a_2^2 = a_1^2 + 4k = 8k, a_2 = 2\sqrt{2k} = \sqrt{2}a_1$.

P_3 的坐标为 $(\frac{a_2 + a_3}{2}, \frac{a_3 - a_2}{2})$,

则 $\frac{a_3 + a_2}{2} \times \frac{a_3 - a_2}{2} = \frac{a_3^2 - a_2^2}{4} = k, a_3^2 = a_2^2 + 4k = 12k, a_3 = 2\sqrt{3k} = \sqrt{3}a_1$.

以此类推, P_n 的坐标为 $(\frac{a_n + a_{n-1}}{2}, \frac{a_n - a_{n-1}}{2})$,

则 $\frac{a_n + a_{n-1}}{2} \times \frac{a_n - a_{n-1}}{2} = \frac{a_n^2 - a_{n-1}^2}{4} = k, a_n^2 = a_{n-1}^2 + 4k = 4nk, a_n = 2\sqrt{nk} = \sqrt{n}a_1$.

$A_n(2\sqrt{nk}, 0), P_n(\sqrt{nk} + \sqrt{(n-1)k}, \sqrt{nk} - \sqrt{(n-1)k})$.

$y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n$

$$= \frac{a_1}{2} + \frac{a_2 - a_1}{2} + \frac{a_3 - a_2}{2} + \dots + \frac{a_{n-1} - a_{n-2}}{2} + \frac{a_n - a_{n-1}}{2}$$

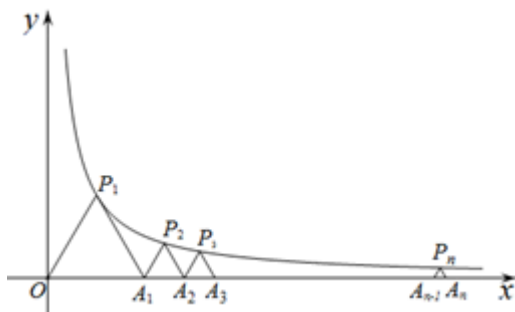
$$= \frac{a_n}{2} = \sqrt{nk}.$$



【总结】

点 A_n 的横坐标与 A_1 的横坐标之间存在的关系为: $a_n = \sqrt{n} \cdot a_1$.

如图, $P_1(x_1, y_1)$ 、 $P_2(x_2, y_2)$ 、 $\dots$ 、 $P_n(x_n, y_n)$ 在函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0, x > 0$)的图象上,
 $\triangle OP_1A_1$ 、 $\triangle P_2A_1A_2$ 、 $\triangle P_3A_2A_3$ 、 $\dots$ 、 $\triangle P_nA_{n-1}A_n$ 都是等边三角形,
 边 OA_1 、 A_1A_2 、 $\dots$ 、 $A_{n-1}A_n$ 都在 x 轴上.
 A_1 的坐标为_____, A_n 的坐标为_____.



设 A_1 的横坐标为 a_1 , A_2 的横坐标为 a_2 , A_3 的横坐标为 a_3, A_n 的横坐标为 a_n ,

$$P_1 \text{ 的坐标为 } \left(\frac{a_1}{2}, \frac{\sqrt{3}a_1}{2} \right), \frac{a_1}{2} \times \frac{\sqrt{3}a_1}{2} = \frac{\sqrt{3}a_1^2}{4} = k, \sqrt{3}a_1^2 = 4k,$$

$$P_2 \text{ 的坐标为 } \left(\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{\sqrt{3}(a_2 - a_1)}{2} \right), \frac{a_2 + a_1}{2} \times \frac{\sqrt{3}(a_2 - a_1)}{2} = \frac{\sqrt{3}(a_2^2 - a_1^2)}{4} = k,$$

$$\sqrt{3}(a_2^2 - a_1^2) = 4k, \sqrt{3}a_2^2 = 8k, a_2 = \sqrt{2} \cdot a_1,$$

$$P_3 \text{ 的坐标为 } \left(\frac{a_3 + a_2}{2}, \frac{\sqrt{3}(a_3 - a_2)}{2} \right), \frac{a_3 + a_2}{2} \times \frac{\sqrt{3}(a_3 - a_2)}{2} = \frac{\sqrt{3}(a_3^2 - a_2^2)}{4} = k,$$

$$\sqrt{3}(a_3^2 - a_2^2) = 4k, \sqrt{3}a_3^2 = 12k, a_3 = \sqrt{3} \cdot a_1,$$

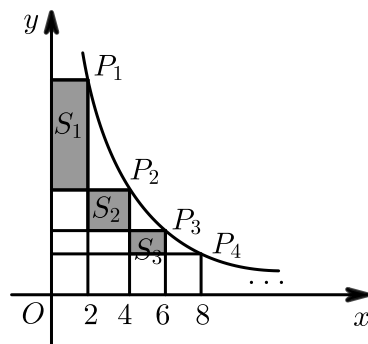
.....

$$P_n \text{ 的坐标为 } \left(\frac{a_n + a_{n-1}}{2}, \frac{\sqrt{3}(a_n - a_{n-1})}{2} \right),$$

$$\frac{a_n + a_{n-1}}{2} \times \frac{\sqrt{3}(a_n - a_{n-1})}{2} = \frac{\sqrt{3}(a_n^2 - a_{n-1}^2)}{4} = k, \sqrt{3}(a_n^2 - a_{n-1}^2) = 4k, \sqrt{3}a_n^2 = 4nk,$$

$$\text{故 } a_n^2 = na_1^2, a_n = \sqrt{n} \cdot a_1.$$

42. 如图所示, 在函数 $y = \frac{8}{x}$ ($x > 0$) 的图像上有点 P_1 、 P_2 、 P_3 、.....、 P_n 、 P_{n+1} , 点 P_1 的横坐标为2, 且后面每个点的横坐标与它前面相邻点的横坐标的差都是2, 过点 P_1 、 P_2 、 P_3 ...、 P_{n+1} 分别作 x 轴、 y 轴的垂线段, 构成若干个矩形, 如图所示, 将图中阴影部分的面积从左至右依次记为 S_1 、 S_2 、...、 S_n , 则 $S_1 = \underline{\hspace{2cm}}$, $S_n = \underline{\hspace{2cm}}$. (用含 n 的代数式表示)



【答案】 $4; \frac{8}{n(n+1)}$

【解析】 当 $x = 2$ 时, P_1 的纵坐标为 4 ,
 当 $x = 4$ 时, P_2 的纵坐标为 2 ,
 当 $x = 6$ 时, P_3 的纵坐标为 $\frac{4}{3}$,
 当 $x = 8$ 时, P_4 的纵坐标为 1 ,
 当 $x = 10$ 时, P_5 的纵坐标为: $\frac{4}{5}$,

...

$$\text{则 } S_1 = 2 \times (4 - 2) = 4 = 2 \left[\frac{8}{2 \times 1} - \frac{8}{2 \times (1+1)} \right];$$

$$S_2 = 2 \times \left(2 - \frac{4}{3} \right) = 2 \times \frac{2}{3} = 2 \left[\frac{8}{2 \times 2} - \frac{8}{2 \times (2+1)} \right];$$

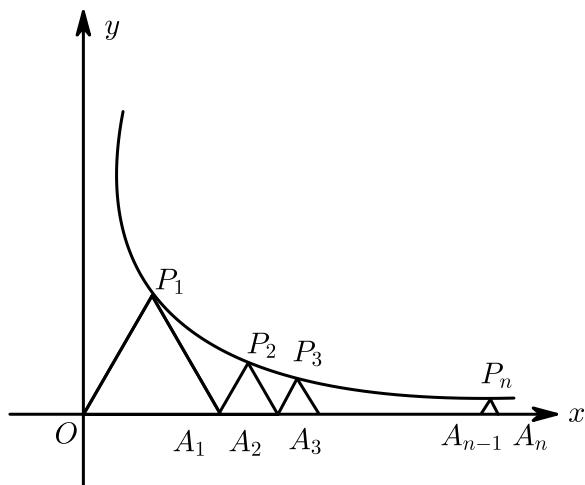
$$S_3 = 2 \times \left(\frac{4}{3} - 1 \right) = 2 \times \frac{1}{3} = 2 \left[\frac{8}{2 \times 3} - \frac{8}{2 \times (3+1)} \right],$$

.....

$$S_n = 2 \left[\frac{8}{2n} - \frac{8}{2(n+1)} \right] = \frac{8}{n(n+1)} .$$

【标注】【知识点】 反比例函数与找规律

43. 如图, $P_1, P_2, P_3 \cdots P_n$ (n 为正整数) 分别是反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 在第一象限图象上的点, $A_1, A_2, A_3 \cdots A_n$ 分别为 x 轴上的点, 且 $\triangle P_1 O A_1, \triangle P_2 A_1 A_2, \triangle P_3 A_2 A_3 \cdots \triangle P_n A_{n-1} A_n$ 均为等边三角形. 若点 A_1 的坐标为 $(2, 0)$, 则点 A_2 的坐标为 _____, 点 A_n 的坐标为 _____.



【答案】 $(2\sqrt{2}, 0)$; $(2\sqrt{n}, 0)$

【解析】 方法一：由题意可知， $P_1(1, \sqrt{3})$ ， $k = \sqrt{3}$.

$$A_2(x_2, 0), P_2\left(\frac{2+x_2}{2}, \frac{\sqrt{3}(x_2-2)}{2}\right),$$

$$\frac{2+x_2}{2} \times \frac{\sqrt{3}(x_2-2)}{2} = \sqrt{3}, (2+x_2)(x_2-2) = x_2^2 - 4 = 4, x_2 = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{设 } A_{n-1}(x_{n-1}, 0), A_n(x_n, 0), P_n\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}, \frac{\sqrt{3}(x_n-x_{n-1})}{2}\right),$$

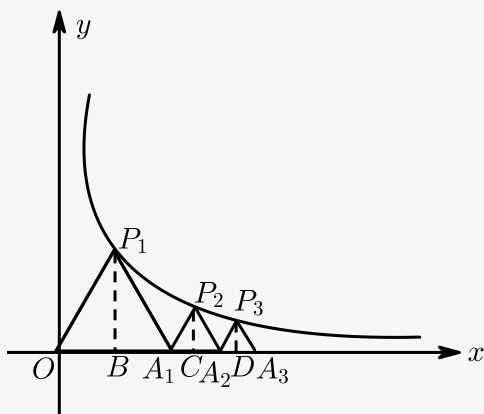
$$\frac{x_{n-1}+x_n}{2} \times \frac{\sqrt{3}(x_n-x_{n-1})}{2} = \sqrt{3},$$

$$x_n^2 - x_{n-1}^2 = 4, x_{n-1}^2 - x_{n-2}^2 = 4, \dots$$

$$x_3^2 - x_2^2 = 4, x_2^2 - x_1^2 = 4,$$

$$x_n^2 - x_1^2 = 4(n-1), x_1 = 2, x_n^2 = 4n, x_n = 2\sqrt{n}.$$

方法二：作 $P_1B \perp x$ 轴于 B ， $P_2C \perp x$ 轴于 C ， $P_3D \perp x$ 轴于 D ，如图，



$\therefore \triangle P_1OA_1$ 为等边三角形， $A_1(2, 0)$ ，

$\therefore OB = 1$ ， $P_1B = \sqrt{3}OB = \sqrt{3}$ ，

$\therefore P_1$ 的坐标为 $(1, \sqrt{3})$ ，

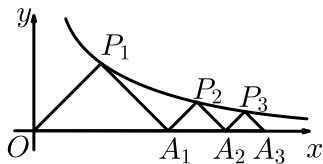
$\therefore k = 1 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$ ，

设 $A_1C = t$ ，

$\therefore \triangle P_2 A_1 A_2$ 为等边三角形 ,
 $\therefore P_2 C = \sqrt{3} A_1 C = \sqrt{3} t$,
 $\therefore P_2$ 点的坐标为 $(t+2, \sqrt{3}t)$,
 $\therefore (t+2) \cdot \sqrt{3}t = \sqrt{3}$, 解得 $t = \sqrt{2} - 1$ 或 $t = -\sqrt{2} - 1$ (舍去) ,
 $\therefore A_1 A_2 = 2t = 2\sqrt{2} - 2$,
 $\therefore OA_2 = 2\sqrt{2}$,
 $\therefore A_2$ 点的坐标为 $(2\sqrt{2}, 0)$,
 同理得到 A_3 ; 点的坐标为 $(2\sqrt{3}, 0)$,
 $\therefore A_n$ 点的坐标为 $(2\sqrt{n}, 0)$.
 故答案为 $(2\sqrt{2}, 0)$, $(2\sqrt{n}, 0)$.

【标注】【知识点】反比例函数与找规律

44. 如图, 点 $P_1(x_1, y_1)$, 点 $P_2(x_2, y_2) \cdots$ 点 $P_n(x_n, y_n)$ 都在函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象上, $\triangle P_1 O A_1$, $\triangle P_2 A_1 A_2$, $\triangle P_3 A_2 A_3 \cdots \triangle P_n A_{n-1} A_n$ 都是等腰直角三角形, 斜边 OA_1 , $A_1 A_2$, $A_2 A_3 \cdots A_{n-1} A_n$, 都在 x 轴上 (n 是大于或等于 2 的正整数), 已知点 A_1 的坐标为 $(2, 0)$, 则点 P_n 的坐标为 _____. (用含 n 的式子表示)



【答案】 $(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}, \sqrt{n} - \sqrt{n-1})$

【解析】 过点 P_1 作 $P_1 E \perp x$ 轴于点 E ,

过点 P_2 作 $P_2 F \perp x$ 轴于点 F ,

过点 P_3 作 $P_3 G \perp x$ 轴于点 G ,

$\therefore \triangle P_1 O A_1$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore P_1 E = O E = A_1 E = \frac{1}{2} O A_1 = 1,$$

设点 P_1 的坐标为 $(1, 1)$,

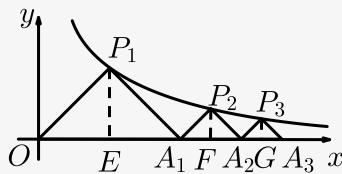
$$\therefore \text{反比例函数解析式为 } y = \frac{1}{x},$$

设点 P_2 的坐标为 $(b+2, b)$, 将点 $P_2(b+2, b)$ 代入 $y = \frac{1}{x}$, 可得 $b = \sqrt{2} - 1$,

故点 P_2 的坐标为 $(\sqrt{2} + 1, \sqrt{2} - 1)$,

则 $A_1 F = A_2 F = \sqrt{2} - 1$, $O A_2 = O A_1 + A_1 A_2 = 2\sqrt{2}$,

设点 P_3 的坐标为 $(c + 2\sqrt{2}, c)$, 将点 $P_3(c + 2\sqrt{2}, c)$ 代入 $y = \frac{1}{x}$, 可得 $c = \sqrt{3} - \sqrt{2}$,



故点 P_3 的坐标为 $(\sqrt{3} + \sqrt{2}, \sqrt{3} - \sqrt{2})$,

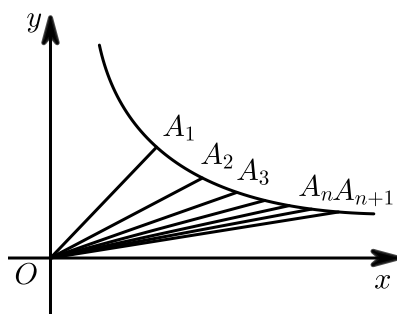
综上所述可得: P_1 的坐标为 $(1, 1)$, P_2 的坐标为 $(\sqrt{2} + 1, \sqrt{2} - 1)$, P_3 的坐标为 $(\sqrt{3} + \sqrt{2}, \sqrt{3} - \sqrt{2})$,

总结规律可得: P_n 坐标为: $(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}, \sqrt{n} - \sqrt{n-1})$.

故答案为: $(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}, \sqrt{n} - \sqrt{n-1})$.

【标注】【知识点】反比例函数与找规律

45. 如图, 反比例函数 $y = \frac{1}{x} (x > 0)$ 的图象与正比例函数 $y = x$, $y = \frac{1}{2}x$, $y = \frac{1}{3}x, \dots, y = \frac{1}{n}x$, $y = \frac{1}{n+1}x$ 的图象依次交于点 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, A_{n+1}$, 连接 $A_1A_2, A_2A_3, A_2A_4, \dots, A_nA_{n+1}$, 记 $\triangle OA_1A_2, \triangle OA_2A_3, \triangle OA_3A_4, \dots, \triangle OA_nA_{n+1}$ 的面积分别为 $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$.



(1) $S_8 = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + \dots + S_n^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

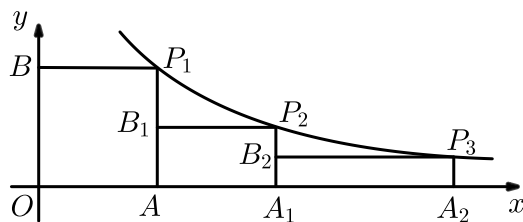
【答案】 (1) $\frac{\sqrt{2}}{24}$
(2) $\frac{n}{4(n+1)}$

【解析】 (1) 由题可得当 $\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y = x \end{cases}$ 时, A_1 坐标为 $(1, 1)$,
同理 $A_2 = \left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $A_3 = \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \dots, A_{n+1}$ 为 $\left(\sqrt{n+1}, \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$,
$$S_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} - 1\right)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1}}$$
$$S_n^2 = \frac{1}{4n(n+1)}.$$
$$\therefore S_8 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{9}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{2} \times 3} = \frac{\sqrt{2}}{24}.$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad S_1^2 + S_2^2 + \cdots + S_n^2 &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{4} \times \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{n(n+1)} \\
 &= \frac{1}{4} \left[1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} \right] \\
 &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \times \frac{n}{n+1} \\
 &= \frac{n}{4(n+1)}.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】反比例函数与找规律

46. 如图，平面直角坐标系中，边长为1的正方形 OAP_1B 的顶点 A 、 B 分别在 x 轴、 y 轴上，点 P_1 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象上，过 P_1A 的中点 B_1 作矩形 $B_1AA_1P_2$ ，使顶点 P_2 落在反比例函数的图象上，再过 P_2A_1 的中点 B_2 作矩形 $B_2A_1A_2P_3$ ，使顶点 P_3 落在反比例函数的图象上，...，依此规律，作出矩形 $B_n - A_{n-2}A_{n-1}P_n$ 时，落在反比例函数图象上的顶点 P_n 的坐标是 _____。



【答案】 $\left(2^{n-1}, \frac{1}{2^{n-1}}\right)$

【解析】 $\because$ 正方形 OAP_1B 的边长为1，点 P_1 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象上，

$$\therefore P_1(1, 1),$$

$$\therefore k = 1,$$

$$\therefore \text{在反比例函数的解析式为: } y = \frac{1}{x},$$

$$\therefore B_1 \text{ 是 } P_1A \text{ 的中点,}$$

$$\therefore P_2A_1 = AB_1 = \frac{1}{2},$$

$$\therefore OA_1 = 2,$$

$$\therefore P_2\left(2, \frac{1}{2}\right),$$

$$\text{同理, } P_3\left(2^2, \frac{1}{2^2}\right),$$

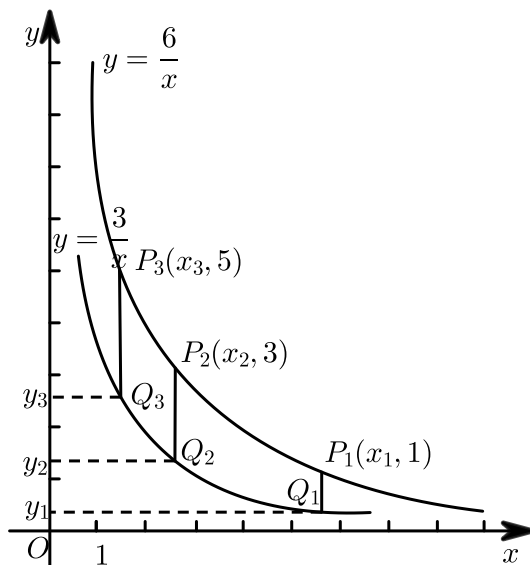
...

$$\therefore P_n\left(2^{n-1}, \frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

故答案为： $\left(2^{n-1}, \frac{1}{2^{n-1}}\right)$.

【标注】【知识点】反比例函数与四边形综合

47. 两个反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 、 $y = \frac{6}{x}$ 在第一象限内的图像如图所示，点 P_1 、 P_2 、 P_3 、……、 P_{2013} 在反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图像上，它们的横坐标分别是 x_1 、 x_2 、 x_3 、……、 x_{2013} ，纵坐标分别是1、3、5、……共2013个连续奇数，过点 P_1 、 P_2 、 P_3 、…、 P_{2013} 分别作 y 轴的平行线，与函数 $y = \frac{3}{x}$ 的图象交点依次是 $Q_1(x_1, y_1)$ 、 $Q_2(x_2, y_2)$ 、 $Q_3(x_3, y_3)$ 、…、 $Q_{2013}(x_{2013}, y_{2013})$ ，则 $y_{2013} = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 2012.5

【解析】 $\because$ 第2013个奇数为 $2 \times 2013 - 1 = 4025$,

$\therefore P_{2013}$ 的坐标为 $\left(\frac{6}{4025}, 4025\right)$,

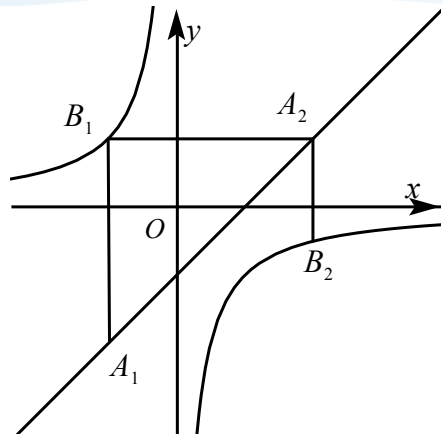
$\because P_{2013}Q_{2013}$ 平行 y 轴 ,

$\therefore Q_{2013}$ 的横坐标为 $\frac{6}{4025}$,

$\therefore Q_{2013}$ 的纵坐标为 $\frac{3}{\frac{6}{4025}} = 2012.5$, 即 $y_{2013} = 2012.5$.

【标注】【知识点】点坐标找规律

48. 如图，已知点 A_1 、 A_2 、…、 A_n 均在直线 $y = x - 1$ 上，点 B_1 、 B_2 、…、 B_n 均在双曲线 $y = -\frac{1}{x}$ 上，并且满足： $A_1B_1 \perp x$ 轴， $B_1A_2 \perp y$ 轴， $A_2B_2 \perp x$ 轴， $B_2A_3 \perp y$ 轴，…， $A_nB_n \perp x$ 轴， $B_nA_{n+1} \perp y$ 轴，…，记点 A_n 的横坐标为 a_n （ n 为正整数）. 若 $a_1 = -1$ ，则 $a_{2018} = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 2

【解析】 $\because a_1 = -1$,

$\therefore B_1$ 的坐标是 $(-1, 1)$,

$\therefore A_2$ 的坐标是 $(2, 1)$,

即 $a_2 = 2$,

$\because a_2 = 2$,

$\therefore B_2$ 的坐标是 $(2, -\frac{1}{2})$,

$\therefore A_3$ 的坐标是 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$,

即 $a_3 = \frac{1}{2}$,

$\because a_3 = \frac{1}{2}$,

$\therefore B_3$ 的坐标是 $(\frac{1}{2}, -2)$,

$\therefore A_4$ 的坐标是 $(-1, -2)$,

即 $a_4 = -1$,

$\because a_4 = -1$,

$\therefore B_4$ 的坐标是 $(-1, 1)$,

$\therefore A_5$ 的坐标是 $(2, 1)$,

即 $a_5 = 2$,

$\dots$,

$\therefore a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$, 每3个数一个循环, 分别是 $-1, 2, \frac{1}{2}$,

$\therefore 2018 \div 3 = 672 \dots 2$,

$\therefore a_{2018}$ 是第673个循环的第2个数,

$\therefore a_{2018} = 2$.

故答案为: 2.

下节预告

学习千万条，**预习**第一条

